1 Domaine de fonctions réelles

> **Rappel.** Le **domaine** d'une fonction f est l'ensemble des valeurs x telles que $f(x)$ est défini.
>
> $$\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ est défini}\}$$

Avec les opérations de bases, il y a deux situations où une opération n'est pas définie : on ne peut pas diviser par zéro et on ne peut pas prendre une racine paire d'un nombre négatif.

$$\cancel{\div 0} \qquad \tfrac{A}{B} \text{ défini} \iff B \neq 0 \text{ (Pas de division par zéro)}$$

$$\cancel{\sqrt{<0}} \qquad \sqrt[n]{A} \text{ défini} \iff n \text{ impair ou } n \text{ pair et } A \geq 0$$

(pas de racine paire de nombres négatifs)

1.1 Division par zéro

Exemple 1. On veut déterminer le domaine de la fonction réelle définie par

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1}.$$

On a que

$$\begin{aligned} f(x) \text{ déf} &\iff \frac{x+2}{x-1} \text{ déf.} \\ &\iff x-1 \neq 0 \\ &\iff x \neq 1 \end{aligned}$$

La fonction f est donc définie pour toute valeur réelle sauf la valeur 1.

Si on exprime cette solution sous forme d'ensembles :

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

Exemple 2. On veut déterminer le domaine de la fonction réelle définie par

$$f(x) = \frac{x^5 - x - 1}{x^2 - 2x - 3}.$$

On a que

$$\begin{aligned} f(x) \text{ déf} &\iff \frac{x^5 - x - 1}{x^2 - 2x - 3} \text{ déf.} \\ &\iff x^2 - 2x - 3 \neq 0 \\ &\iff (x-3)(x+1) \neq 0 \\ &\iff x - 3 \neq 0 \text{ et } x + 1 \neq 0 \\ &\iff x \neq 3 \text{ et } x \neq -1 \end{aligned}$$

La fonction f est donc définie pour toute valeur réelle sauf les valeurs -1 et 3.

Si on exprime cette solution sous forme d'ensembles :

$$\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 3\}$$

Question 1
Déterminer le domaine des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{5x}{x-5}$ b) $f(x) = \dfrac{x-5}{5x}$ c) $f(x) = \dfrac{5x}{x^2-25}$

1.2 Racines de négatifs

Exemple 3. On veut déterminer le domaine de la fonction réelle définie par

$$f(x) = \sqrt{2x-3}$$

On a que

$$\begin{aligned} f(x) \text{ déf} &\iff \sqrt{2x-3} \text{ déf.} \\ &\iff 2x - 3 \geq 0 \\ &\iff 2x \geq 3 \\ &\iff x \geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

La fonction f est donc définie pour toute valeur réelle plus grandes que $\frac{3}{2}$.

Si on exprime cette solution sous forme d'ensembles :

$$\mathrm{dom}(f) = \left]\frac{3}{2}, \infty\right[.$$

Question 2
Déterminer le domaine des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \sqrt{x-5}$ c) $f(x) = \sqrt{3-x}$

b) $f(x) = \sqrt{6x-2}$ d) $f(x) = \sqrt{2-5x}$

1.3 Racines de négatifs avec tableau de signes

Exemple 4. On veut déterminer le domaine de la fonction réelle définie par

$$f(x) = \sqrt{2x^2 + x - 6}.$$

On a que

$$\begin{aligned} f(x) \text{ défini} &\iff \sqrt{2x^2 + x - 6} \text{ déf} \\ &\iff 2x^2 + x - 6 \geq 0 \\ &\iff (2x-3)(x+2) \geq 0. \end{aligned}$$

Pour déterminer les valeurs de x satisfaisant la dernière égalité, on fait un tableau de signe :

x		-2		$\frac{3}{2}$	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x+2)(2x-3)$	$+$	0	$-$	0	$+$

On a donc que le produit $(x+2)(2x-3)$ est positif quand x est plus grand que $\frac{3}{2}$ ou quand x est plus petit que -2.

L'ensemble de ces valeurs de x est

$$\mathrm{dom}(f) =]-\infty, -2] \cup \left[\frac{3}{2}, \infty\right[$$

Question 3
Déterminer le domaine des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$

b) $f(x) = \sqrt{4-x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$

d) $f(x) = \sqrt{-3x^2+2x+1}$

1.4 Combinaisons de plusieurs conditions

Pour déterminer le domaine de fonctions définites par des expressions algébriques plus complexes, on doit déterminer sous quelle condition chacune des opérations de division ou de racine est définie et ensuite combiner toutes ces conditions ensemble. Un graphe des intervalles pour simplifier cette dernière étape.

Exemple 5. On veut déterminer le domaine de la fonction réelle définie par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$$

On identifie les conditions à satisfaire pour que la fonction soit définie :

$$\begin{aligned} f(x) \text{ déf} &\iff \frac{\sqrt{x-1}}{x-2} \text{ déf.} \\ &\iff \sqrt{x-1} \text{ déf. et } \frac{\sqrt{x-1}}{x-2} \text{ déf.} \end{aligned}$$

On traite chacune de ces conditions séparément :

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} \text{ déf.} &\iff x-1 \geq \\ &\iff x \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x-1}}{x-2} \text{ déf.} &\iff x-2 \neq 0 \\ &\iff x \neq 2 \end{aligned}$$

La fonction f est donc définie pour toute valeur réelle plus grandes que 1 mais différentes de 2.

Si on exprime cette solution sous forme d'ensembles :

$$\mathrm{dom}(f) = [1, \infty[\setminus \{2\}.$$

Exemple 6. On veut déterminer le domaine de la fonction réelle définie par

$$f(x) = \frac{x-4}{(x-2)\sqrt{x-1}}$$

On identifie les conditions à satisfaire pour que la fonction soit définie :

$$\begin{aligned} f(x) \text{ déf} &\iff \frac{x-4}{(x-2)\sqrt{x-1}} \text{ déf.} \\ &\iff \sqrt{x-1} \text{ déf. et } \frac{x-4}{(x-2)\sqrt{x-1}} \text{ déf.} \end{aligned}$$

On traite chacune de ces conditions séparément :

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} \text{ déf.} &\iff x-1 \geq \\ &\iff x \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{x-4}{(x-2)\sqrt{x-1}} \text{ déf.} &\iff (x-2)\sqrt{x-1} \neq 0 \\ &\iff x-2 \neq 0 \text{ et } \sqrt{x-1} \neq 0 \\ &\iff x \neq 2 \text{ et } x-1 \neq 0 \\ &\iff x \neq 2 \text{ et } x \neq 1 \end{aligned}$$

La fonction f est donc définie pour toute les valeurs réelles plus grandes que 1 mais différentes de 1 et 2.

Si on exprime cette solution sous forme d'ensembles :

$$\mathrm{dom}(f) =]1, \infty[\setminus \{2\}.$$

Question 4
Déterminer le domaine des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \sqrt{x-5}$

b) $f(x) = \sqrt{6x-2}$

c) $f(x) = \sqrt{3-x}$

d) $f(x) = \sqrt{2-5x}$

Exercices supplémentaires

Question 5
Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes.

a) $f(x) = 3x - 1$
b) $f(x) = x^{100} + x^{50} + 1$
c) $f(x) = \dfrac{1}{x-10}$
d) $f(x) = \dfrac{1}{x-\sqrt{3}}$
e) $f(x) = \dfrac{1}{2x-3}$
f) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)(x+2)}$
g) $f(x) = \dfrac{3x-1}{x}$
h) $f(x) = \dfrac{1}{2x+\sqrt{5}}$
i) $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+5}$
j) $f(x) = \dfrac{2}{x^2-16}$
k) $f(x) = \dfrac{3}{(x-4)^2}$
l) $f(x) = \dfrac{-x+2}{x^3-x^2+5x}$
m) $f(x) = \dfrac{-x+2}{x^3-x^2+5x}$

Question 6

a) $f(x) = \sqrt{x-1}$
b) $f(x) = \sqrt{1-x}$
c) $f(x) = \sqrt{3x-7}$
d) $f(x) = \sqrt{7x-3}$
e) $f(x) = \sqrt{x-2\sqrt{3}}$
f) $f(x) = \sqrt{3-7x}$
g) $f(x) = \sqrt{7-3x}$
h) $f(x) = \sqrt{2x+\pi}$
i) $f(x) = \sqrt{2x-5}$
j) $f(x) = \sqrt{2x}$

Question 7

a) $f(x) = \sqrt{x^2-1}$
b) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$
c) $f(x) = \sqrt{x^2-9}$
d) $f(x) = \sqrt{16-9x^2}$
e) $f(x) = \sqrt{x^2+x-6}$
f) $f(x) = \sqrt{x^2-10x+21}$
g) $f(x) = \sqrt{x^2-5x+4}$
h) $f(x) = \sqrt{-3x^2+5x-2}$

Question 8
Définir une fonction…

a) qui n'est pas définie en $x = 1$;
b) qui n'est pas définie en $x = -2$ et $x = 3$;
c) qui n'est pas définie en $x = 3$ et qui s'annulle en $x = 2$;
d) qui n'est pas définie pour tout $x \leq 4$;
e) qui n'est pas définie pour tout $x \geq 5$;
f) qui n'est pas définie pour tout $x \leq \frac{1}{7}$;

Question 9
Déterminer le domaine des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$
b) $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x-1}}$
c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x}$
d) $f(x) = \dfrac{1}{(x-3)\sqrt{x-1}}$
e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-3}$
f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}}{x-1}$
g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-3}}$
h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}}$

Question 10
Déterminer le domaine des fonctions suivantes.

a) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$
b) $f(x) = \sqrt{3x-2}$
c) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
d) $f(x) = \dfrac{2x^2-3x-5}{x^2-x-2}$
e) $f(x) = \sqrt{x^2-4x-5}$
f) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x-5}}$
g) $f(x) = \sqrt{(x-1)^3}$
h) $f(x) = \sqrt{(1-x)^3}$

Solutions

Question 1

a)
$$
\begin{aligned}
f(x) \text{ déf} &\iff \frac{5x}{x-5} \text{ déf..}\\
&\iff x-5 \neq 0\\
&\iff x \neq 5
\end{aligned}
$$

La fonction f est donc définie pour toute valeur réelle sauf la valeur 5.

Si on exprime cette solution sous forme d'ensembles : $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{5\}$

b)
$$
\begin{aligned}
f(x) \text{ déf} &\iff \frac{x-5}{5x} \text{ déf..}\\
&\iff 5x \neq 0\\
&\iff x \neq 0
\end{aligned}
$$

La fonction f est donc définie pour toute valeur réelle sauf la valeur zéro.

Si on exprime cette solution sous forme d'ensembles : $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c)
$$
\begin{aligned}
f(x) \text{ déf} &\iff \frac{5x}{x^2-25} \text{ déf.}\\
&\iff x^2-25 \neq 0\\
&\iff (x-5)(x+5) \neq 0\\
&\iff x-5 \neq 0 \text{ et } x+5 \neq 0\\
&\iff x \neq 5 \text{ et } x \neq -5
\end{aligned}
$$

La fonction f est donc définie pour toute valeur réelle sauf les valeurs 5 et -5.

Si on exprime cette solution sous forme d'ensembles : $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{5, -5\}$

Question 2

a)
$$
\begin{aligned}
f(x) \text{ déf} &\iff \sqrt{x-5} \text{ déf..}\\
&\iff x-5 \geq 0\\
&\iff x \geq 5
\end{aligned}
$$

La fonction f est donc définie pour toute valeur réelle plus grande ou égale à 5.

Si on exprime cette solution sous forme d'ensembles : $\text{dom}(f) = [5, \infty[$

b) $f(x)$ déf $\iff$ $\sqrt{6x-2}$ déf..

$$\iff 6x-2 \geq 0$$
$$\iff 6x \geq 2$$
$$\iff x \geq \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

La fonction f est donc définie pour toute valeur réelle plus grande ou égale à $\frac{1}{3}$.

Si on exprime cette solution sous forme d'ensembles : $\text{dom}(f) = \left[\frac{1}{3}, \infty\right[$

c) $f(x)$ déf $\iff$ $\sqrt{3-x}$ déf..

$$\iff 3-x \geq 0$$
$$\iff 3 \geq x$$

La fonction f est donc définie pour toute valeur réelle plus petite ou égale à 3.

Si on exprime cette solution sous forme d'ensembles : $\text{dom}(f) = [-\infty, 3[$

d) $f(x)$ déf $\iff$ $\sqrt{2-5x}$ déf..

$$\iff 2-5x \geq 0$$
$$\iff 3 \geq 5x$$
$$\iff \frac{3}{5} \geq x$$

La fonction f est donc définie pour toute valeur réelle plus petite ou égale à $\frac{3}{5}$.

Si on exprime cette solution sous forme d'ensembles : $\text{dom}(f) = \left[-\infty, \frac{3}{5}\right[$

Question 3

a) $f(x)$ déf $\iff$ $\sqrt{x^2-4}$ déf. .

$$\iff x^2-4 \geq 0$$
$$\iff (x-2)(x+2) \geq 0$$

x		-2		2	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-2)(x+2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

La fonction f est donc définie pour toute valeur réelle inclusivement plus grande que 2 ou plus petite que -2.

Si on exprime cette solution sous forme d'ensembles : $\text{dom}(f) =]-\infty, -2] \cup [2, \infty[$

b) $f(x)$ déf $\iff$ $\sqrt{4-x^2}$ déf. .

$$\iff 4-x^2 \geq 0$$
$$\iff (2-x)(2+x) \geq 0$$
$$\iff -(x-2)(x+2) \geq 0$$
$$\iff (x-2)(x+2) \leq 0$$

x		-2		2	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-2)(x+2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

La fonction f est donc définie pour toute valeur réelle entre -2 et 2.

Si on exprime cette solution sous forme d'ensembles : $\text{dom}(f) = [-2, 2]$

c) $f(x)$ déf $\iff$ $\sqrt{x^2-3x+2}$ déf..

$$\iff x^2-3x+2 \geq 0$$
$$\iff (x-2)(x-1) \geq 0$$

x		1		2	
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(x-1)(x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

La fonction f est donc définie pour toute valeur réelle plus petite que 1 et plus grande que 2.

Si on exprime cette solution sous forme d'ensembles : $\text{dom}(f) =]-\infty, 1] \cup [2, \infty]$

d) $f(x)$ déf $\iff$ $\sqrt{-3x^2+2x+1}$ déf..

$$\iff -3x^2+2x+1 \geq 0$$
$$\iff -(3x^2-2x-1) \geq 0$$
$$\iff -(3x+1)(x-1) \geq 0$$
$$\iff 3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x-1) \leq 0$$

x		$-\frac{1}{3}$		1	
$x+\frac{1}{3}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)$	$+$	0	$-$	0	$+$

La fonction f est donc définie pour toute valeur réelle entre -2 et 2.

Si on exprime cette solution sous forme d'ensembles : $\text{dom}(f) = \left[-\frac{1}{3}, 1\right]$

Question 4

a) $f(x)$ déf $\iff$ $\sqrt{x-5}$ déf..

$$\iff x-5 \geq 0$$
$$\iff x \geq 5$$

La fonction f est donc définie pour toute valeur réelle plus grande ou égale à 5.

Si on exprime cette solution sous forme d'ensembles : $\text{dom}(f) = [5, \infty[$

b) $f(x)$ déf $\iff$ $\sqrt{6x-2}$ déf..

$$\iff 6x-2 \geq 0$$
$$\iff 6x \geq 2$$
$$\iff x \geq \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

La fonction f est donc définie pour toute valeur réelle plus grande ou égale à $\frac{1}{3}$.

Si on exprime cette solution sous forme d'ensembles : $\text{dom}(f) = \left[\frac{1}{3}, \infty\right[$

c) $f(x)$ déf $\iff$ $\sqrt{3-x}$ déf..

$$\iff 3-x \geq 0$$
$$\iff 3 \geq x$$

La fonction f est donc définie pour toute valeur réelle plus petite ou égale à 3.

Si on exprime cette solution sous forme d'ensembles : $\text{dom}(f) = [-\infty, 3[$

d) $f(x)$ déf $\iff$ $\sqrt{2-5x}$ déf..

$$\iff 2-5x \geq 0$$
$$\iff 3 \geq 5x$$
$$\iff \frac{3}{5} \geq x$$

La fonction f est donc définie pour toute valeur réelle plus petite ou égale à $\frac{3}{5}$.

Si on exprime cette solution sous forme d'ensembles : $\text{dom}(f) = \left[-\infty, \frac{3}{5}\right[$

Question 5

a) $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$
b) $\text{dom}(f) = \mathbb{R}$
c) $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{10\}$
d) $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\sqrt{3}\right\}$
e) $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$
f) $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$
g) $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
h) $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$
i) $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{2}\right\}$
j) $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}$
k) $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{4\}$
l) $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
m) $\text{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Question 6

a) $\mathrm{dom}(f) = [1, \infty[$

b) $\mathrm{dom}(f) =]-\infty, 1]$

c) $\mathrm{dom}(f) = \left[\frac{7}{3}, \infty\right[$

d) $\mathrm{dom}(f) = \left[\frac{3}{7}, \infty\right[$

e) $\mathrm{dom}(f) = [2\sqrt{3}, \infty[$

f) $\mathrm{dom}(f) = \left]-\infty, \frac{3}{7}\right]$

g) $\mathrm{dom}(f) = \left]-\infty, \frac{7}{3}\right]$

h) $\mathrm{dom}(f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \infty\right[$

i) $\mathrm{dom}(f) = \left[\frac{5}{2}, \infty\right[$

j) $\mathrm{dom}(f) = [0, \infty[$

Question 7

a) $\mathrm{dom}(f) =]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$

b) $\mathrm{dom}(f) = [-1, 1]$

c) $\mathrm{dom}(f) =]-\infty, -3] \cup [3, \infty[$

d) $\mathrm{dom}(f) = \left[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right]$

e) $\mathrm{dom}(f) =]-\infty, -3] \cup [2, \infty[$

f) $\mathrm{dom}(f) =]-\infty, 3] \cup [7, \infty[$

g) $\mathrm{dom}(f) =]-\infty, 1] \cup [4, \infty[$

h) $\mathrm{dom}(f) = \left[-2, \frac{1}{3}\right[$

Question 8

a) Par exemple : $f(x) = \frac{1}{(x-1)}$

b) Par exemple : $f(x) = \frac{1}{(x+2)(x-3)}$

c) Par exemple : $f(x) = \frac{x-2}{(x-3)}$

d) Par exemple : $f(x) = \sqrt{x-4}$

e) Par exemple : $f(x) = \sqrt{5-x}$

f) Par exemple : $f(x) = \sqrt{x-\frac{1}{7}}$

Question 9

a) $\mathrm{dom}(f) =]1, \infty[$

b) $\mathrm{dom}(f) =]1, \infty[$

c) $\mathrm{dom}(f) = [1, \infty[$

d) $\mathrm{dom}(f) =]1, \infty[\setminus \{3\}$

e) $\mathrm{dom}(f) = [1, \infty[\setminus \{3\}$

f) $\mathrm{dom}(f) = [3, \infty[$

g) $\mathrm{dom}(f) =]3, \infty[$

h) $\mathrm{dom}(f) = [3, \infty[$

Question 10

a) $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$

b) $\mathrm{dom}(f) = \left[\frac{2}{3}, \infty\right[$

c) $\mathrm{dom}(f) = \left]\frac{2}{3}, \infty\right[$

d) $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2, -1\}$

e) $\mathrm{dom}(f) = \left]-\infty, 2-2\sqrt{6}\right] \cup \left[2+2\sqrt{6}, \infty\right[$

f) $\mathrm{dom}(f) = \left]-\infty, 2-2\sqrt{6}\right[\cup \left]2+2\sqrt{6}, \infty\right[$

g) $\mathrm{dom}(f) = [1, \infty[$

h) $\mathrm{dom}(f) =]-\infty, 1]$